

Analiza zespolona
Lista 7

Zad 1. Podać przykład funkcji, dla której $2 + i$ jest biegunem rzędu czwartego, -1 jest punktem istotnie osobliwym i ∞ jest biegunem pojedynczym.

Zad 2. Obliczyć residua we wszystkich izolowanych (skończonych lub nie) punktach osobliwych funkcji z zadania 11 na liście 6.

Zad 3. Obliczyć całki:

a) $\int_{|z-3|<15} \frac{z^2 + 1}{z - 2} dz,$

b) $\int_{C(-2006i, 2006)} \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} dz.$

c) $\int_{\Gamma} \frac{\sin^3(z - i)}{(z - i)^3} dz,$ gdzie Γ jest łamaną zamkniętą łączą punkty $-1, 2i, 1,$

d) $\int_{C(0, r)} \frac{dz}{(z - a)(z - b)},$ gdzie $|a| < |b|$ i $r \neq |a|, |b|,$

e) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2},$ gdzie Γ jest elipsą $x^2 + 4y^2 = 16,$

f) $\int_{\Gamma} \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)} \sin z dz,$ gdzie Γ jest okręgiem $C(1 + i, \sqrt{2}),$

g) $\int_{\Gamma} \frac{1}{1 - z^8} dz,$ gdzie Γ jest łamaną zamkniętą łączą punkty $2, 2i, -2, -2i,$

h) $\int_{C(1, 2)} z^2 e^{-\frac{1}{z}} dz,$

i) $\int_{C(0, 1)} \sin\left(\frac{2}{z}\right) dz.$

Zad 4. Niech f będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^a}$ gdzie $a > 1$ i $M > 0$ są stałe. Wykazać, że

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma(r)} f(z) dz = 0, \quad \text{gdzie } \Gamma(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Zad 5. Obliczyć całki

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - 2}{x^4 + 1} dx, \quad ac - b^2 > 0,$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^3},$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}},$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad ac - b^2 > 0.$